לוגיקה (1) תרגיל מסכם פתרונות

1. נתבונן בסדרה $M_i = models(\varphi_i)$ לפי הנתונים מתקיים $M_i \subset M_{i+1}$ לכל $0 \le i < k$. כלומר זו סדרה עולה ממש של תת קבוצות של קבוצת המבנים ל-L שנסמנה M. אבל $|M| = 2^n$ ולכן $k \le 2^n$. העובדה שהחסם הדוק נובעת ישירות ממשפט השלמות של קבוצת הקשרים $\{\vee, \wedge, \neg\}$. תהי $\langle A_1, ..., A_{2^n} \rangle$ מנייה של איברי M. ונגדיר קבוצות $M_0 = \emptyset$ $M_i = \{A_1, ..., A_i\}$ לכל $1 \le i \le 2^n$. כעת ממשפט השלמות לכל $0 \le i \le 2^n$ יש פסוק φ_i כך ש-$M_i = models(\varphi_i)$ ולכן קיבלנו קבוצת פסוקים כנדרש עבור $k = 2^n$.

2. ראה פתרון בקובץ $WORD$ המצורף.

3.

(א) $H : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ יקרא שיכון אם H פונקציה חח"ע מ-A ל-B, ומתקיים:
לכל c קבוע אישי בשפה: $H(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
לכל r סימן יחס n מקומי בשפה, ולכל $a_1, ..., a_n \in A$: $r^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = r^{\mathfrak{B}}(H(a_1), ..., H(a_n))$.
לכל f סימן פונקציה n מקומי בשפה, ולכל $a_1, ..., a_n \in A$: $H(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(H(a_1), ..., H(a_n))$.

(ב) יהיו $a_1, ..., a_n \in A$ כלשהם. עלינו להוכיח $val(\mathfrak{A}, s\binom{x_1, ..., x_n}{a_1, ..., a_n}, \psi) = T$.
כעת באינדוקציה על יצירת ψ (שימו לב כי זוהי נוסחה חסרת כמתים ולכן יש לבדוק רק את המקרים הקלים באינדוקציה) ניתן להוכיח:
$val(\mathfrak{B}, H \circ s\binom{x_1, ..., x_n}{H(a_1), ..., H(a_n)}, \psi) = T$. אבל מכיוון ש:
$(H \circ s)\binom{x_1, ..., x_n}{H(a_1), ..., H(a_n)} = H \circ (s\binom{x_1, ..., x_n}{a_1, ..., a_n})$ ולפי הנתון קיבלנו את הנדרש.

4.

(א) נכון. אחרת נניח $\varphi \wedge \psi \notin \Gamma$ כלומר $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ (בגלל דעתנות) אבל קבוצת הפסוקים $\{\varphi, \psi, \neg\varphi \wedge \psi\}$ אינה עקבית בסתירה.

(ב) נכון. אחרת נניח $\varphi \notin \Gamma$ וגם $\psi \notin \Gamma$ ולכן מדעתנות $\neg\varphi \in \Gamma$ וגם $\neg\psi \in \Gamma$ אבל קבוצת הפסוקים $\{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \vee \psi\}$ אינה עקבית בסתירה.

(ג) $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma \Leftrightarrow \neg\neg\varphi \in \Gamma$ כאשר בכל אחד מהחיצים כיוון אחד נובע מדעתנות והכיוון השיני מעקביות.

5. ראשית נפעיל את אקסיומת "מן הכלל אל הפרט" פעמיים פעם לגבי הנוסחה $\forall y r(x, y)$ ופעם לגבי הנוסחה $r(c, y)$ נקבל את שני הפסוקים:

$*_1 \quad \forall x \forall y r(x, y) \to \forall y r(c, y)$

$*_2 \quad \forall y r(c, y) \to r(c, c)$

כעת ע"י הצבה ב-$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ (שימו לב שזו טאו-טולוגיה של תחשיב היחסים) נקבל את האקסיומה הבאה:

$*_3 \quad (\forall x \forall y r(x, y) \to \forall y r(c, y)) \to ((\forall y r(c, y) \to r(c, c)) \to (\forall x \forall y r(x, y) \to r(c, c)))$

כעת נפעיל את כלל הניתוק על $*_3$ ו-$*_1$ ונקבל:

$*_4 \quad (\forall y r(c, y) \to r(c, c)) \to (\forall x \forall y r(x, y) \to r(c, c))$

נפעיל את כלל הניתוק על $*_4$ ו-$*_2$ ונקבל:

$*_5 \quad \forall x \forall y r(x, y) \to r(c, c)$

לבסוף נפעיל על $*_5$ את כלל ההכללה ונקבל את המבוקש.